

В. А. АМБАРЦУМИАН

## НОВЫЙ СПОСОБ РАСЧЕТА РАССЕЯНИЯ СВЕТА В МУТНОЙ СРЕДЕ

Задача о расчете светового режима в мутной среде, состоящей из плоскопараллельных слоев, является основной задачей не только гидрооптики, но и теории рассеяния в молочных стеклах, в планетных атмосферах и других оптически плотных средах.

Предлагавшиеся до сих пор способы решения этой задачи можно разбить на две группы: одни способы сводятся к последовательному вычислению рассеяний первого, второго и высших порядков, другие — к замене в дифференциальном уравнении переноса излучения входящего в него косинуса угла между направлением излучения и нормалью к слоям некоторым его средним значением (приближения Эддингтона и Шварцшильда).

Однако метод учета рассеяний последовательных порядков оказывается практически применимым только до рассеяния второго порядка. Расчет рассеяний третьего и высшего порядков наталкивается на практически непреодолимые вычислительные трудности. Между тем, на больших глубинах как прямой свет от источников освещения, так и рассеянный свет первого и второго порядков играют незначительную роль по сравнению с рассеянным светом высших порядков, и пренебречь последним невозможно.

Что касается приближенной замены в уравнении переноса косинуса угла его средним значением, то это, как показывает исследование, ведет в общем случае (при наличии одновременного рассеяния и поглощения) к большим ошибкам.

Метод, разработанный нами на астрономической обсерватории Ленинградского университета, также является приближенным, но он дает тем лучшие результаты, чем более глубокие слои мы рассматриваем. Сущность его заключается в следующем.

Поместим нульпункт высот на внешней границе рассеивающей среды. Оптическая глубина на высоте  $z$  определяется равенством:

$$\tau = \int_z^0 \alpha dz,$$

где  $\alpha$  — коэффициент ослабления, являющийся функцией  $z$ .

При достаточно глубокой среде принимается, что  $\tau$  изменяется от 0 до  $\infty$ . В среду попадает внешнее излучение, которое ослабляется при проникновении в область больших  $\tau$ . На больших глубинах мы уже имеем дело в основном не с прямым излучением внешних источников, а с потоком идущего вниз диффузного, т. е. многократного, рассеянного в среде излучения.

Вместо этой реальной задачи мы рассматриваем сначала идеализованную задачу, в которой нет внешней границы и оптическая глубина  $\tau$

изменяется от  $-\infty$  до  $+\infty$ . В этой задаче уже нигде нет прямого излучения внешних источников, а везде имеем дело с потоком диффузного излучения, идущего из области отрицательных  $\tau$  в область положительных  $\tau$ .

Поставленная таким образом идеализованная задача решена нами для любой формы индикатрисы рассеяния точно и до конца. Полученное решение довольно хорошо представляет и решение реальной задачи на больших оптических глубинах. Однако для слоев, близких к поверхности, это решение уже не точно, и мы можем подойти к решению реальной задачи (где  $\tau$  меняется от 0 до  $\infty$ ) путем последовательных приближений, приняв за первое приближение найденное точное решение идеализованной задачи (т. е. задачи двусторонней бесконечности).

Если  $\eta(\tau, \theta, \varphi) d\omega$  — количество энергии, излучаемой в единицу времени единицей объема в телесном угле  $d\omega$ , то мы имеем основное уравнение нашей задачи двусторонней бесконечности:

$$\eta(\tau, \theta, \varphi) = \frac{\sigma}{4\pi} \int x(\gamma) I(\theta', \varphi') d\omega', \quad (1)$$

где  $I(\theta', \varphi')$  — интенсивность излучения в направлении  $\theta', \varphi'$ ;  $\gamma$  — угол между направлениями  $\theta, \varphi$  и  $\theta', \varphi'$ ;  $x(\gamma)$  — индикатриса рассеяния, а  $\sigma$  — коэффициент рассеяния.

Введя обозначения

$$B = \frac{\eta}{\alpha}; \quad \lambda = \frac{\sigma}{\alpha}, \quad (2)$$

где  $\alpha$  — коэффициент ослабления, переписываем (1) в виде

$$B(\tau, \theta, \varphi) = \frac{\lambda}{4\pi} \int x(\gamma) I(\theta', \varphi') d\omega'. \quad (3)$$

Кроме этого уравнения, называемого в астрофизике уравнением лучевого равновесия, мы имеем еще уравнение переноса

$$\cos \theta \frac{dI}{d\tau} = I - B. \quad (4)$$

Уравнения (3) и (4) определяют искомые функции  $B$  и  $I$ . Решив уравнение (4) относительно  $I$  и приняв во внимание предельные условия, мы находим выражение интенсивности  $I$  через функцию  $B$ . Подставляя это выражение для  $I$  в уравнение (3), приходим к интегральному уравнению лучевого равновесия.

Остановимся сначала на случае сферической индикатрисы рассеяния, когда  $x(\gamma) = 1$ . Тогда это интегральное уравнение лучевого равновесия для двусторонней бесконечности принимает вид

$$B(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} Ei(\tau - t) B(t) dt, \quad (5)$$

где

$$Eiu = \int_1^{\infty} e^{-xu} \frac{dx}{x}. \quad (6)$$

Точное решение этого уравнения, при котором поток излучения идет в область положительных  $\tau$ , имеет вид

$$B(\tau) = Ce^{-k\tau}, \quad (7)$$

где величина  $k$  связана с  $\lambda$  соотношением

$$\lambda = \frac{2k}{\ln \frac{1+k}{1-k}} \quad (8)$$

Если  $k$  мало, т. е.  $\lambda$  близко к единице, то первую часть уравнения (8) можно разложить в ряд по степеням  $k$ , и мы имеем

$$\lambda = 1 - \frac{k^2}{3} \quad (8a)$$

Эти два члена дают приближенную связь  $\lambda$  и  $k$ , получающуюся в приближении Эддингтона.

Полученное решение (7) справедливо в случае двусторонней бесконечности. Следовательно, в реальных условиях оно применимо только к глубоким слоям. Для того же, чтобы получить решение нашей реальной задачи, пригодное везде, нужно решить уравнение

$$B(\tau) = f(\tau) + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} E t(\tau - t) B(t) dt, \quad (9)$$

где  $f(\tau)$  есть член, учитывающий прямое излучение, достигающее оптической глубины  $\tau$ . В случае, если внешним источником является Солнце, находящееся на зенитном расстоянии  $\theta_0$ , имеем

$$f(\tau) = \frac{\lambda}{4} S e^{-\tau \sec \theta_0}, \quad (10)$$

где  $\pi S$  — поток энергии, падающий вне среды на  $1 \text{ см}^2$  поверхности, перпендикулярной к лучам Солнца.

Выражение (7) уже не удовлетворяет точно уравнению (9). Но оно удовлетворяет уравнению (9) приближенно на больших глубинах, если  $C$  подобрать соответствующим образом. Мы выберем постоянную  $C$  так, чтобы уравнение (9) удовлетворялось в «среднем», т. е. чтобы интегралы от 0 до  $\infty$  от обеих частей (9) были точно равны друг другу. Оказывается, что для этого  $C$  должно иметь значение

$$C = - \frac{k [\ln(1+k) - \ln(1-k)]}{k + \ln(1-k)} \int_0^{\infty} f(\tau) d\tau. \quad (11)$$

Приняв такое значение  $C$ , мы можем подставить (7) в правую часть (9) и получить новое приближение для  $B(\tau)$ ; полученное новое выражение для  $B(\tau)$  снова подставить в правую часть (9) и т. д. Иными словами, исходя из (7) как из первого приближения, мы можем искать следующие приближения. Преимущество этого метода заключается в том, что уже исходное приближение является довольно хорошим на больших оптических глубинах.

В случае асферической индикатрисы рассеяния условие лучевого равновесия имеет вид

$$B(\tau, \theta, \varphi) = \frac{\lambda}{4\pi} \int x(\cos \gamma) I(\theta', \varphi') d\omega', \quad (12)$$

где

$$\cos \gamma = \cos \theta \cdot \cos \theta' + \sin \theta \cdot \sin \theta' \cdot \cos(\varphi - \varphi').$$

Чтобы перейти от этого уравнения к интегральному уравнению, содержащему только одну неизвестную функцию  $B$ , нужно опять решить уравнение переноса, найдя выражение  $I$  через  $B$ , и подставить в (12). Как показывает специальное исследование, в однородной задаче двусто-

ронней бесконечности нет положительных решений, зависящих от азимута  $\varphi$ . Поэтому функции  $B$  и  $I$  могут быть приняты зависящими только от  $\tau$  и  $\theta$ .

Далее мы можем ввести некоторую новую вспомогательную функцию  $p(\theta, \theta')$ , играющую в нашем исследовании весьма важную роль и определяемую равенством

$$p(\theta, \theta') = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} x(\cos \gamma) d\varphi. \quad (13)$$

Физический смысл функций  $p(\theta, \theta')$  заключается в том, что если на элемент объема падает излучение под углом  $\theta$  к нормали, то из этого излучения доля  $p(\theta, \theta') \sin \theta' d\theta'$  рассеивается в поясе, заключенном между альмукантатами  $\theta'$  и  $\theta' + d\theta'$ .

Функция  $p(\theta, \theta')$  обладает одним весьма важным и интересным свойством. Оно заключается в следующем. Разложим индикатрису рассеяния  $x(\cos \gamma)$  в ряд по полиномам Лежандра

$$x(\cos \gamma) = \sum_i x_i p_i(\cos \gamma), \quad (14)$$

где  $x_i$  — коэффициенты разложения. Тогда  $p(\theta, \theta')$  представляется в виде ряда

$$p(\theta, \theta') = \sum_i x_i p_i(\cos \theta) p_i(\cos \theta'). \quad (15)$$

С помощью введенной нами функции  $p(\theta, \theta')$  интегральное уравнение лучевого равновесия может быть написано в виде

$$\begin{aligned} B(\tau, \theta) = & \frac{\lambda}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} p(\theta, \theta') \operatorname{tg} \theta' d\theta' \int_{\tau}^{\infty} e^{-(t-\tau) \sec \theta'} B(t, \theta') dt + \\ & + \frac{\lambda}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} p(\theta, \theta') (\operatorname{tg} \theta') d\theta' \int_0^{\tau} e^{-(t-\tau) \sec \theta'} B(t, \theta') dt. \end{aligned} \quad (16)$$

Решение этого уравнения ищем в форме

$$B(\tau, \theta) = b(\theta) e^{-k\tau}. \quad (17)$$

Оказывается, что (16) удовлетворится, если  $b(\theta)$  удовлетворяет, в свою очередь, простому интегральному уравнению

$$b(\theta) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\pi} \frac{p(\theta, \theta') b(\theta') \sin \theta' d\theta'}{1 + k \cos \theta'}. \quad (18)$$

При данном  $\lambda$  мы должны искать то значение  $k$ , при котором уравнение (18) имеет отличное от нуля положительное решение. На практике приходится делать обратное и при данном  $k$  искать значение  $\lambda$  и, затабулировав  $\lambda(k)$ , переворачивать эту таблицу.

Заметим, что форму индикатрисы рассеяния всегда приходится брать из опыта. В виду этого при определенной точности опытных данных имеет смысл в разложении (14) ограничиться только конечным числом членов. Поэтому и в (15) входит лишь конечное число членов суммы, вследствие чего уравнение (18) является уравнением с вырожденным ядром и всегда может быть решено в конечном виде. В результате  $b(\theta)$

представляется в виде суммы полиномов Лежандра. Из выражения  $b(\theta)$  посредством формулы

$$I(\theta) = \frac{b(\theta)}{1 + k \cos \theta} e^{-k\tau} \quad (19)$$

получаем значения интенсивности излучения в различных направлениях. Мы видим, что относительное распределение интенсивности по направлениям одинаково на всех глубинах.

Надо, однако, иметь в виду, что формулы (17), (18) и (19) представляют собой решение задачи для двусторонней бесконечности. Поэтому в реальной задаче эти решения будут удовлетворительными только на больших оптических глубинах.

Мы можем лишь утверждать, что на больших оптических глубинах относительное распределение интенсивности по направлениям  $\theta$  уже не меняется с глубиной.

Далее, необходимо помнить, что  $I$  не зависит от  $\epsilon$  только на больших оптических глубинах. Во внешних же слоях асимметричное расположение по азимутам внешних источников света может вызвать и зависимость диффузного излучения от азимута.

Наконец, то обстоятельство, что интенсивность, согласно (19), меняется с оптической глубиной, экспоненциально может быть для удобства истолковано так, что для диффузного излучения существует какой-то свой коэффициент ослабления, который в  $k$  раз отличается от коэффициента ослабления прямого света.

Практически бывает необходимо при заданной форме индикатрисы рассеяния и при заданном значении  $\lambda$  найти  $I(\theta)$  и  $k$ .

С этой целью нами была выполнена некоторая вычислительная работа. Как указывалось выше, при каждой данной индикатрисе приходится табулировать  $\lambda$  как функцию. При этом нами было обращено главное внимание на «вытянутые» индикатрисы рассеяния типа

$$x(\cos \gamma) = C(1 + x_1 \cos \gamma)^n, \quad (20)$$

когда луч, падающий на элемент объема, рассеивается преимущественно в направлениях, близких к направлению падения. В формуле (20)  $x$  есть постоянный параметр.

Таблица 1

Индикатриса рассеяния  $1 + x \cos \theta$   
Значения  $\lambda$  для различных значений  $k$  и  $x$

$k \backslash x$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
0,0	0,986	0,969	0,943	0,910	0,865	0,866	0,728	0,612	0,518
0,2	0,985	0,967	0,940	0,903	0,856	0,792	0,711	0,588	0,492
0,4	0,984	0,964	0,936	0,897	0,846	0,779	0,693	0,563	0,466
0,6	0,982	0,962	0,930	0,888	0,834	0,763	0,672	0,540	0,439
0,8	0,980	0,959	0,924	0,878	0,822	0,747	0,651	0,516	0,415
1,0	0,979	0,956	0,917	0,868	0,808	0,729	0,63	0,492	0,392

В табл. 1 приведены значения  $\lambda$  для различных значений  $k$  при индикатрисе типа  $x(\gamma) = 1 + x_1 \cos \gamma$ . Таблица составлена для шести различных значений  $x_1$ . При  $x_1 = 0$  мы имеем сферическую индикатрису рассеяния. При индикатрисе рассматриваемого типа решение уравнения (18)

имеет вид

$$b(\theta) = b_0 + b_1 \cos \theta,$$

где одна из постоянных может быть задана произвольно. Отношение  $b_1/b_0$  приводится для различных  $k$  и  $x_1$  в табл. 2.

Таблица 2

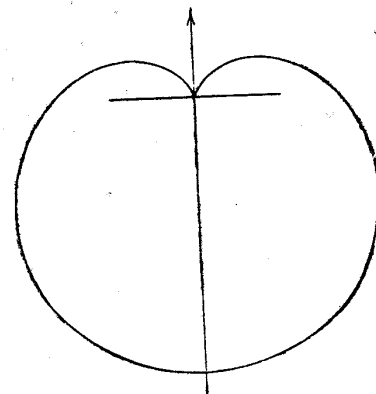
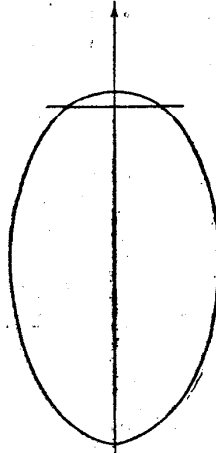
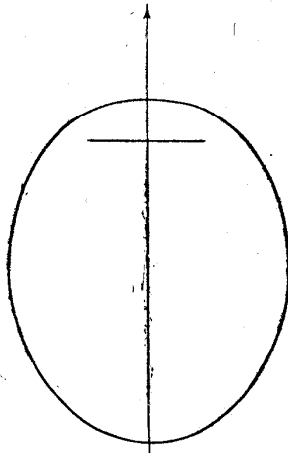
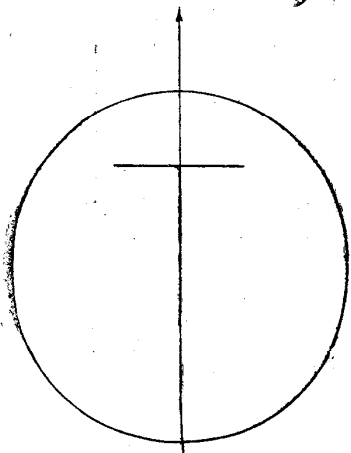
Индикатриса рассеяния  $1 + x \theta$ Отношение коэффициентов  $b_1/b_0$  для различных значений  $k$  и  $x$ 

$k \backslash x$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
0,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,2	-0,015	-0,019	-0,020	-0,046	-0,050	-0,062	-0,071	-0,093	-0,102
0,4	-0,029	-0,056	-0,060	-0,082	-0,100	-0,126	-0,148	-0,202	-0,218
0,6	-0,058	-0,084	-0,107	-0,143	-0,169	-0,208	-0,247	-0,306	-0,354
0,8	-0,088	-0,103	-0,146	-0,204	-0,234	-0,290	-0,350	-0,445	-0,487
1,0	-0,102	-0,131	-0,207	-0,265	-0,311	-0,384	-0,461	-0,569	-0,633

Таблица 3

Индикатриса рассеяния  $1 + x \cos \theta$ Отношение  $\frac{I(0)}{I(\pi)}$  для различных значений  $k$  и  $x$ 

$k \backslash x$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
0,0	0,667	0,538	0,431	0,333	0,250	0,176	0,111	0,053	0,026
0,2	0,647	0,518	0,414	0,304	0,226	0,155	0,096	0,044	0,021
0,4	0,629	0,481	0,383	0,283	0,212	0,136	0,082	0,035	0,017
0,6	0,593	0,454	0,347	0,249	0,187	0,116	0,067	0,028	0,012
0,8	0,558	0,437	0,321	0,221	0,165	0,098	0,053	0,020	0,0069
1,0	0,542	0,413	0,284	0,194	0,130	0,080	0,041	0,015	0,0057

 $k=0,4, \lambda=0,917$  $k=0,6, \lambda=0,808$  $k=0,8, \lambda=0,630$ 

Фиг. 1

Фиг. 2

В табл. 3 для той же индикатрисы рассеяния  $1 + x_1 \cos \gamma$  и при тех же значениях  $k$  и  $x_1$  даны значения  $I(0)/I(\pi) \frac{I(0)}{I(\pi)}$ , т. е. отношения интенсивностей излучений, идущих вертикально вверх и вниз. Эти значения характеризуют в некоторой степени способность среды к рассеянному отражению.

Для иллюстрации на фиг. 1, 2, 3 приводятся полярные диаграммы зависимости интенсивности излучения от направления, т. е.  $I(\theta)$ , в частном случае, когда  $x = 1$ ; другими словами, при индикатрисе вида:

$$x(\gamma) = 1 + \cos \gamma$$

и при различных значениях  $k$ . Самая эта индикатриса изображена на фиг. 1.

Таблица 4

Вытянутая индикатриса рассеяния

$$x(\gamma) = \frac{3}{4} (1 + \cos \gamma)^2$$

Значения  $\lambda$  и  $\frac{I_b(0)}{I(\pi)}$  при различных  $k$

$k$	$\lambda$	$b_1/b_0$	$b_2/b_0$	$I(0)/I(\pi)$	$k$	$\lambda$	$b_1/b_0$	$b_2/b_0$	$I(0)/I(\pi)$
0,1	0,093	-0,100	0,000	0,669	0,6	0,761	-0,597	0,059	0,070
0,2	0,973	-0,200	0,009	0,444	0,7	0,672	-0,702	0,083	0,036
0,3	0,941	-0,295	0,013	0,294	0,8	0,562	-0,821	0,119	0,017
0,4	0,893	-0,402	0,028	0,189	0,9	0,420	-0,967	0,175	0,0051
0,5	0,835	-0,496	0,040	0,118					

В табл. приводятся значения  $\lambda$ ,  $\frac{I(0)}{I(\pi)}$  и коэффициентов  $\frac{b_2}{b_0}$  и  $\frac{b_1}{b_0}$  в решении

$$b(\theta) = b_0 + b_1 \cos \theta + b_2 \left( \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$$

уравнения (18), при индикатрисе рассеяния  $x(\gamma) = \frac{3}{4} (1 + \cos \gamma)^2$  и при различных значениях  $k$ .

Для индикатрисы  $x(\gamma) = C(1 + \cos \gamma)^3$  значения  $\lambda$  при трех различных значениях  $k$  приводятся в табл. 5.

Нами вычислены такие же таблицы и для других индикатрис рассеяния, например для релеевской. Надо, однако, иметь в виду, что в морской воде индикатриса рассеяния не симметрична, а очень вытянута, и если пользоваться формулой (20), то показатель  $n$  будет иметь довольно большое значение. Между тем, когда  $n$  возрастает, число членов в разложениях (14) и (15) растет, и решение уравнения (18) становится практически все труднее и труднее.

Таблица 5

Индикатриса рассеяния  $x(\gamma) = c(1 + \cos \gamma)^3$

$k$	$\lambda$
0,7	0,630
0,8	0,517
0,9	0,374